2.8 型別檢查於$\lambda \to$

$x : \alpha \to \alpha,\ y : (\alpha \to \alpha) \to \beta \vdash (\lambda z : \beta.\lambda u : \gamma.z)(y\ x) : \gamma \to \beta$

`(a)|` $^*x : \alpha \to \alpha^*$

`(b)||` $^*y : (\alpha \to \alpha) \to \beta^*$

`||` $\ldots$

`(n)||`$(\lambda z : \beta.\lambda u : \gamma.z)(y\ x) : \gamma \to \beta$

appl 拆解

`(a) |` $^*x : \alpha \to \alpha^*$

`(b) ||` $^*y : (\alpha \to \alpha) \to \beta^*$

`(m1)||` $\lambda z : \beta.\lambda u : \gamma.z : ?_1$

`(m2)||` $y\ x : ?_2$

`(n) ||`$(\lambda z : \beta.\lambda u : \gamma.z)(y\ x) : \gamma \to \beta$

繼續反推

`(a) |` $^*x : \alpha \to \alpha^*$

`(b) ||` $^*y : (\alpha \to \alpha) \to \beta^*$

`|||` $^*z : \beta^*$

`||||` $^*u : \gamma^*$

`||||` $\lambda u.z : \gamma \to \beta$

`(m1)||` $\lambda z : \beta.\lambda u : \gamma.z : \beta \to (\gamma \to \beta)$

`(m2)||` $y\ x : \beta$

`(n) ||`$(\lambda z : \beta.\lambda u : \gamma.z)(y\ x) : \gamma \to \beta$

就可以得到一串推論過程。

但是，$(\lambda z : \beta\lambda u : \gamma.z)(y\ x)$

用 beta-reduction 處理可得：

$(\lambda u : \gamma.(y\ x))$

型別是：$\gamma \to \beta$，也和剛才的推論出來的(n)的型別相同。

2.9 找 term 於$\lambda \to$

$a \in T \Rightarrow$ a 是 T 的 inhabitant（居民）

type 是邏輯表達式(proposition)

term 構築型別的證明

證明有一個 term，滿足

$? : A \to B \to A$

證明法：逆著回推，箭頭→型別表示 abst 抽象。

|*$x : A$*

| |*$y : B$*

| | $x : A$

| $\lambda y.x : B \to A$

$\lambda x.\lambda y.x : A \to B \to A$

PAT-interpretation
- proposition as types 命題即型別
- proof as terms 證明即 term

2.10 $\lambda \to$的一般性質

dom、$\upharpoonright$投影(projection)、$\subseteq$次上下文(subcontext)

定義
1. 上下文：$\Gamma \equiv x_1 : \sigma_1, ..., x_n : \sigma_n$ $\Rightarrow$即上下文的定義域(domain)是$(x_1, x_2, ..., x_n)$
2. 若所有的宣告變數一樣，且排序一致，則$\Gamma' \subseteq \Gamma$，即Γ'是Γ的次上下文
3. Γ'是Γ上下文的 permutation(排列)，若Γ'的變數宣告於Γ有，且反之亦然。
4. 若Γ是上下文，Φ是變數集合，Γ在Φ上的投影(projection)，即$\Gamma \upharpoonright \Phi$是$\Gamma'$，滿足 $dom(\Gamma') = dom(\Gamma) \cap \Phi$.

定理 2.10.3 自由變數公理

$\Gamma \vdash L : \sigma \Rightarrow FV(L) \subseteq dom(\Gamma)$

任何自由變數 x 在 L 出現，則在Γ有$x : \sigma$這個宣告。

任何變數的型別不會搞混。

Lemma 2.10.5
1. thinning(厚化): 令Γ'和Γ''是滿足$\Gamma' \subseteq \Gamma''$的上下文，$\Gamma' \vdash M : \sigma \Rightarrow \Gamma'' \vdash M : \sigma$
2. condensing(濃縮): $\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow \Gamma \upharpoonright FV(M) \vdash M : \sigma$. 意思是可以移除$x : \sigma$，若是 x 不是 M 的自由變數，所以保持這些和 M 有關的宣告。
3. Permutation(排列): 若$\Gamma \vdash M : \sigma$且 Γ'是Γ的 permutation，則Γ'是上下文，滿足$\Gamma' \vdash M : \sigma$. 指 context 的變數順序不影響推演能力（變數宣告互相獨立）

一個人可以加減 junk 變數到上下文，而不影響衍推能力(derivibility)。

junk 包含於 M 中不自由的變數（typing 的過程不會用到）